# Colle du 05/11 - Sujet 1
# Complexes et calcul algébrique

**Question de cours.**

1. Enoncer la formule de Moivre.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

**Exercice 1.** A l'aide d'un changement d'indice, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

**Exercice 2.** Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $O$ de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$. On fixe $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts du plan complexe appartenant à $\mathscr{C}$. Soit $M(m)$ un point quelconque du cercle différent de $A$ et de $B$. On pose $z = \frac{m-b}{m-a}$. On introduit également les notations suivantes :

$$\alpha = \arg(a), \qquad \beta = \arg(b) \qquad \text{et} \qquad t = \arg(m).$$

1. On suppose $M \in \mathscr{C}$. Montrer alors que
$$z = \mathrm{e}^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\beta-t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-t}{2}\right)}.$$
2. En déduire que $2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ $[2\pi]$.

---



# Colle du 05/11 - Sujet 2
# Complexes et calcul algébrique

**Question de cours.**

1. Enoncer la formule du binôme de Newton.
2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points du plan complexe $M(z)$ tel que l'affixe $z$ vérifie $\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R}$.

**Exercice 1.** Soient $(a, x, y) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le couple d'équations suivant :

$$\begin{cases} \cos(a) + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin(a) + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0. \end{cases}$$

**Exercice 2.** Soit $n \geqslant 2$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k}$.

**Colle du 05/11 - Sujet 3**
**Complexes et calcul algébrique**

**Question de cours.**

1. Enoncer les formules d'Euler.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^j$.

**Exercice 1**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$.

**Exercice 2**. Soit $(a,b) \in \mathbb{U}^2$, $a \neq b$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, calculer $\mathrm{Re}\left(\frac{z+ab\overline{z}-a+b}{a-b}\right)$.